הפקולטה למתמטיקה
בטכניון

חדו"א 2מ1 — 104043

מבחן סוף סמסטר מועד ב', אביב - 27.09.24

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
יש להשתמש בעט שחור או כחול. אין להשתמש בעפרון או בעט אדום.
יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

בחלק זה יש 6 שאלות בחירה מרובה. עליכם לסמן את התשובה הנכונה היחידה בצורה ברורה.
משקל כל שאלה בחלק זה הוא 8 נקודות.

1. נתונים $\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in\mathbb{R}^3$ ונגדיר $\overline{d}=(\overline{a}+3\overline{b}+2\overline{c})\times(-2\overline{a}+\overline{b}-3\overline{c})$.
מהו נפח המקבילון הנוצר ע"י $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ אם ידוע כי $\overline{d}\cdot\overline{c}=-21$?

(א) 3***

(ב) 1

(ג) 5

(ד) 2

(ה) 4

2. תהי $D\subset\mathbb{R}^2$ הקבוצה ברביע הראשון החסומה ע"י העקומים
$y=\frac{1}{x},\ y=\frac{2}{x},\ x^2=y^2+\ln 2,\ x^2=y^2+\ln 4$. אז האינטגרל הכפול

$$\iint\limits_D (x^3y+xy^3)e^{x^3y-xy^3}dxdy$$

שווה ל-

(א) $\frac{8\ln 2}{9}$

(ב) $\frac{\ln 2}{8}$

(ג) $\frac{2}{\ln 2}$***

(ד) $\frac{3}{\ln 2}$

(ה) $\frac{7+5\ln 2}{\pi}$

3. הנפח של

$$V=\{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2+(z-2)^2\le 4\}$$

שווה ל-

(א) $\frac{\pi}{3}$

(ב) $\frac{5\pi}{4}$

(ג) $\frac{4\pi}{7}$

(ד) $\frac{10\pi}{3}$***

(ה) $\frac{2\pi}{5}$

4. מטייל עומד בנקודה $(1,0,-1)$ על הר שצורתו $\cos(xyz)+xz^3+x^3y+xyz+2y=0$. הוא מחליט לנוע משם על ההר בדרך בה קצב שינוי הגובה הוא אפס. לאיזה כיוון במרחב עליו לפנות בתחילת תנועתו?

(א) $(3,-1,0)$

(ב) $(1,-3,0)$

(ג) $(-2,-1,0)$***

(ד) $(3,-6,9)$

(ה) $(-1,2,0)$

5. נתון השדה הוקטורי

$$\overline{F}(x,y)=\big(\cos(x+y^2),2y\cos(y^2+x)\big)$$

והמסילה

$$\overline{r}(t)=\left(\frac{\pi}{2\ln 2}\cdot\ln(1+t),t-t^2\right),\quad 0\le t\le 1.$$

אז העבודה (אינטגרל קווי מסוג שני) של $\overline{F}$ לאורך המסלול $\overline{r}(t)$ היא

(א) 4

(ב) 1***

(ג) 3

(ד) 0

(ה) 2

6. נתון כי $f(x,y,z)$ גזירה ברציפות בכל המרחב וכי לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי

$$f\big(x^2+2x+1,x^2+1,x^2+2\ln x\big)=4e^{3-3x}.$$

אז הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(4,2,1)$ בכיוון הוקטור $(2,1,2)$ שווה ל-

(א) -2***

(ב) -1

(ג) 1

(ד) 2

(ה) 0

חלק ב'

יש לרשום <u>בעמודים הבאים</u> פתרון מלא ומנומק לכל השאלות הבאות.

7. (26 נקודות)

(א) (13 נקודות)
מיצאו ומיינו (סווגו) את הנקודות הקריטיות של

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 - 24x - 12y^2 - 8.$$

פתרון: כיוון שהפונקציה היא פולינום אז היא גזירה ברציפות ולכן הנקודות הקריטיות הן הנקודות בהן הגרדיאנט מתאפס.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 3x^2 + 6xy^2 - 24 = 0 \\ f'_y(x,y) &= 6x^2y - 24y = 6y(x^2-4) = 0 \end{aligned}$$

אם $y = 0$ אז מהמשוואה הראשונה נקבל $x = \pm\sqrt{8}$.
אחרת $x = \pm 2$. אם $x = 2$ נקבל $y = \pm 1$ ואם $x = -2$ אז אין פתרון עבור y.
לכן הנקודות הקריטיות הן

$$(\sqrt{8},0), (-\sqrt{8},0), (2,1), (2,-1).$$

כיוון שהפונקציה היא פולינום אז היא גזירה פעמיים ברציפות ולכן נוכל להשתמש בהסיאן.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+6y^2 & 12xy \\ 12xy & 6x^2-24 \end{pmatrix}.$$

$$H_f(\sqrt{8},0) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{8} & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(\sqrt{8},0) = 144\sqrt{8} > 0, \quad f'_{xx}(\sqrt{8},0) = 6\sqrt{8} > 0$$

ולכן $(\sqrt{8},0)$ היא נקודת מינימום מקומי.

$$H_f(-\sqrt{8},0) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{8} & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(-\sqrt{8},0) = -144\sqrt{8} < 0$$

ולכן $(-\sqrt{8},0)$ היא נקודת אוכף.

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 18 & 24 \\ 24 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(2,1) = -576 < 0$$

ולכן $(2,1)$ היא נקודת אוכף.

$$H_f(2,-1) = \begin{pmatrix} 18 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(2,-1) = -576 < 0$$

ולכן $(2,-1)$ היא נקודת אוכף.

(ב) (13 נקודות)
יהי

$$D = \{(x,y)|\ x^2+y^2 \le 4,\ x+y \ge 0\}.$$

הוכיחו כי יש ל- $g(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^4 - y^2$ ערך מינימלי וערך מקסימלי ב- D ומיצאו ערכים אלו ואת הנקודות בהן הם מתקבלים.

פתרון: D חסום וסגור והפונקציה g היא רציפה כיוון שהיא פולינום ולכן לפי משפט וויארשטראס יש לה מינימום ומקסימום ב- D.
$g(x,y) = x^4-2x^2+y^4-y^2$ פולינום ולכן גזירה ברציפות ולכן כל הנקודות הקריטיות הן הנקודות הפנימיות של D בהן הגרדיאנט מתאפס.

$$g'_x(x,y) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1) = 0 \iff x = 0, \pm 1$$
$$g'_y(x,y) = 4y^3 - 2y = 2y(2y^2-1) = 0 \iff y = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

שנותן 9 נקודות

$$(0,0), (0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$$

מהן

$$(0,\frac{1}{\sqrt{2}}), (1,0), (1,\frac{1}{\sqrt{2}}), (1,-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

נקודות פנימיות של D.
הערה: את $(0,0)$ בהכרח נקבל בהמשך כנקודה קריטית תחת אילוץ ואפשר להוסיף את הנקודה כבר עכשיו.
נעבור כעת למועמדים לקיצון מהשפה של D:
קודם כל, נמצא את נקודות החיתוך של

$$x^2+y^2 = 4,\ x+y = 0$$

שהן $\pm(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.
עבור החלק של השפה שהוא

$$\left\{(x,-x)| -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\right\}$$

נשתמש בהצבה ישירה ונקבל

$$h(x) = g(x,-x) = x^4 - 2x^2 + (-x)^4 - (-x)^2 = 2x^4 - 3y^2, \quad -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$$

ואז $h'(x) = 8x^3 - 6x = 2x(4x^2-3) = 0$ שנותן $x = 0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ ולכן נותן את הנקודות

$$(0,0), \pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

ואת קצוות הקטע שנותנות את הנקודות $\pm(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.
עבור החלק של השפה שהוא

$$\{(x,y)|\ x^2+y^2 = 4,\ y \ge -x\}$$

נחפש נקודות קריטיות תחת האילוץ:
נגדיר $g_1(x,y) = x^2+y^2-4$.
אז $g_1(x,y)$ פולינום ולכן גזירה ברציפות וגם $\overline{\nabla} g(x,y) = (2x,2y)$ שמתאפס רק עבור $(0,0)$ שאינו

מקיים את האילוץ $0 = g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ ולכן כיוון שגם $g(x,y)$ גזירה ברציפות אז אפשר להשתמש בכופלי לגרנג' :

$$\begin{aligned}
&4x^3 - 4x + \lambda 2x = 0\\
&4y^3 - 2y + \lambda 2y = 0\\
&x^2 + y^2 = 4.
\end{aligned}$$

אם $x = 0$ אז מהאילוץ $y = \pm 2$ וזה נותן את הנקודות $(0, \pm 2)$ מהן רק $(0,2)$ מקיימת $y \geq -x$.
כנ"ל אם $y = 0$ אז $x = \pm 2$ וזה נותן את הנקודות $(\pm 2, 0)$ מהן רק $(2,0)$ מקיימת $y \geq -x$.
אם $x, y \neq 0$ אז נקבל

$$\begin{aligned}
2x^2 - 2 + \lambda = 0 &\iff x^2 = \frac{2-\lambda}{2}\\
2y^2 - 1 + \lambda = 0 &\iff y^2 = \frac{1-\lambda}{2}
\end{aligned}$$

וע"י הצבה באילוץ נקבל

$$\frac{2-\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{2} = 4 \iff 3 - 2\lambda = 8 \iff \lambda = -\frac{5}{2}$$

ונקבל את 4 הנקודות

$$(\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{\sqrt{7}}{2})$$

שמהן רק

$$(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}), (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2})$$

מקיימות $y \geq -x$.
לסיכום קיבלנו

$$(0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (1,0), (1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}), (0,0), \pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (\frac{3}{2}, \pm\frac{\sqrt{7}}{2}), (0,2), (2,0).$$

נציב

$$\begin{aligned}
&g(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\\
&g(1,0) = -1\\
&g(1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4} \ \ min\\
&g(0,0) = 0\\
&g\left(\pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})\right) = -\frac{9}{8}\\
&g\Big(\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})\Big) = 2\\
&g(\frac{3}{2}, \pm\frac{\sqrt{7}}{2}) = \frac{15}{8}\\
&g(2,0) = 8\\
&g(0,2) = 12 \ \ max
\end{aligned}$$

8. (26 נקודות)

(א) (13 נקודות)
חשבו את השטף (אינטגרל משטחי מסוג שני) של

$$\overline{F}(x,y,z) = \left(x + e^{yz}, y - e^{x}, 2y - 2e^{x} - 1\right)$$

דרך המשטח

$$S = \{(x,y,z) |\ z = 3 - x^2 - y^2,\ z \geq 2y\}$$

כאשר ל-S ניתנת האוריינטציה בה לנורמל רכיב z שלילי.

פתרון: ההיטל של החיתוך של $z = 3 - x^2 - y^2,\ z = 2y$ על מישור XY הוא $x^2 + (y+1)^2 = 4$ ולכן נסתכל על המשטח

$$S_1 = \{(x,y,z) |\ z = 2y,\ x^2 + (y+1)^2 \leq 4\}$$

עם האוריינטציה בה לנורמל יש רכיב z שלילי.
אז ל- $(-S) + S_1$ יש את האוריינטציה החיובית ביחס לגוף

$$V = \{x,y,z) |\ x^2 + (y+1)^2 \leq 4,\ 2y \leq z \leq 3 - x^2 - y^2\}.$$

השדה הוקטורי גזיר ברציפות בכל נקודה כיוון שכל הרכיבים שלו הם סכומים של פולינומים ושל הרכבה של פונקציות גזירות ברציפות במשתנה אחד עם פולינומים.

$$\mathrm{div}(\overline{F}) = 1 + 1 = 2.$$

לפי גאוס

$$\oiint\limits_{(-S)+S_1} \overline{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \iiint\limits_{V} \mathrm{div}(\overline{F}) dxdydz = \iiint\limits_{V} 2dxdydz$$

ולפי אדיטיביות

$$\oiint\limits_{(-S)+S_1} \overline{F} \cdot \hat{n} d\sigma = -\iint\limits_{S} \overline{F} \cdot \hat{n} d\sigma + \oiint\limits_{S_1} \overline{F} \cdot \hat{n} d\sigma$$

אז

$$\iint\limits_{S} \overline{F} \cdot \hat{n} d\sigma = \iint\limits_{S_1} \overline{F} \cdot \hat{n} d\sigma - \iiint\limits_{V} 2dxdydz.$$

נחשב קודם את $\iiint\limits_{V} 2dxdydz$:

$$\iiint\limits_{V} 2dxdydz = 2 \iint\limits_{x^2+(y+1)^2 \leq 4} \left(\int\limits_{2y}^{3-x^2-y^2} dz \right) dxdy =$$

$$= 2 \iint\limits_{x^2+(y+1)^2 \leq 4} \left(4 - x^2 - (y+1)^2\right) dxdy \underset{\text{פולריות מוזזות}}{=} 2 \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{2} (4 - r^2) r dr d\theta =$$

$$= 4\pi \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \right) = 16\pi.$$

נחשב $\iint\limits_{S_1} \overline{F} \cdot \hat{n} d\sigma$: נשתמש בהצגה הפרמטרית הסטנדרטית $\overline{r}(x,y) = (x, y, 2y),\ x^2 + (y+1)^2 \leq 4$
עבורה $\overline{r}'_x(x,y) \times \overline{r}'_y(x,y) = (0, -2, 1)$.

זו אוריינטציה הפוכה לזו שנתנו ל- S_1 ולכן

$$\iint\limits_{S_1} \overline{F}\cdot\hat{n}d\sigma = -\iint\limits_{x^2+(y+1)^2\le 4} (?, y-e^x, 2y-2e^x-1)\cdot(0,-2,1)dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{x^2+(y+1)^2\le 4} \Big(-2y+2e^x+2y-2e^x-1\Big)dxdy = \iint\limits_{x^2+(y+1)^2\le 4} dxdy = 4\pi$$

ולכן

$$\iint\limits_{S} \overline{F}\cdot\hat{n}d\sigma = 4\pi - 16\pi = -12\pi.$$

(ב) (13 נקודות) חשבו את העבודה (אינטגרל קווי מסוג שני) של השדה הוקטורי

$$\overline{G}(x,y,z) = \left(e^x + yx^2 - z, x^3 + \sin y, -x\right)$$

לאורך העקום L שהוא החיתוך בין שני המשטחים

$$S_1 = \{(x,y,z)|\ z = 1 - x^2 - y^2\}, \quad S_2 = \{(x,y,z)|\ 3x^2 + 3y^2 + (z-1)^2 = 4\}$$

כאשר ל-L ניתנת האוריינטציה שהיא עם כיוון השעון כאשר מסתכלים מלמעלה.

פתרון: נמצא את עקום החיתוך: $z - 1 = -(x^2 + y^2)$ ולכן

$$3x^2+3y^2+(z-1)^2 = 4 \iff (z-1)^2-3(z-1)-4 = 0 \iff z^2-5z = 0 \iff z = 0,5$$

כיוון ש- $z = 1 - x^2 - y^2 \leq 1$ אז $z = 0$ ולכן $x^2 + y^2 = 1$. כלומר

$$L = \{(x,y,0)|\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

נסתכל על

$$S = \{(x,y,0)|\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

עם האוריינטציה בה לנורמל רכיב z שלילי.
אז האוריינטציה שנתונה על L היא האוריינטציה החיובית ביחס ל- S.
השדה הוקטורי גזיר ברציפות בכל נקודה כיוון שכל הרכיבים שלו הם סכומים של פולינומים ושל הרכבה של פונקציות גזירות ברציפות במשתנה אחד עם פולינומים.
לכן לפי סטוקס

$$\oint_L \overline{G} \cdot d\overline{r} = \iint_S \left(\overline{\nabla} \times \overline{G}\right) \cdot \hat{n} d\sigma.$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{G} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x + yx^2 - z & x^3 + \sin y & -x \end{pmatrix} = (0,0,2x^2).$$

ניקח את הפרמטריזציה הסטנדרטית של S שהיא $\overline{r}(x,y) = (x,y,0),\ x^2 + y^2 \leq 1$ ועבורה $\overline{r}'_x(x,y) \times \overline{r}'_y(x,y) = (0,0,1)$ שהיא הפוכה לאוריינטציה הנתונה על S ולכן

$$\oint_L \overline{G} \cdot d\overline{r} = \iint_S \left(\overline{\nabla} \times \overline{G}\right) \cdot \hat{n} d\sigma = -\iint_{x^2+y^2\leq 1} (0,0,2x^2) \cdot (0,0,1) dxdy \underset{\text{פולריות}}{=}$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^3 \cos^2\theta dr d\theta = -\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \cdot \int_0^1 2r^3 dr = -\frac{\pi}{2}.$$